BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng $Q = 25K^{0.5}L^{0.5}$, trong đó Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động. Cho biết giá thuê một đơn vị vốn $p_K = 12$, giá thuê một đơn vị lao động là $p_L = 3$.

   a. Tính mức sử dụng K, L để sản xuất ít nhất là $Q = Q_o = 1250$ với chi phí nhỏ nhất.

   b. Xác định hàm tổng chi phí (theo sản lượng).

   Lời giải.

   a. *Bài toán tương đương với bài toán sau:*

$$\begin{aligned} & p_K K + p_L L \to \min \\ & \begin{cases} Q & \geq Q_o \\ K, L & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Theo lý thuyết, ta biết rằng bài toán trên cũng tương đương với bài toán:

$$\begin{aligned} & p_K K + p_L L \to \min \\ & \begin{cases} Q & = Q_o \\ K, L & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Hay

$$\begin{aligned} & 12K + 3L \to \min \\ & \begin{cases} 25K^{0.5}L^{0.5} & = 1250 \\ K, L & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Từ điều kiện, ta được $KL = 2500$*, hay* $K = \dfrac{2500}{L}$*. Thế vào hàm mục tiêu, ta được*

$$12 \times \frac{2500}{L} + 3L.$$

   Áp dụng bất đẳng thức Cauchy $x + y \geq 2\sqrt{xy}$*, ta được giá trị nhỏ nhất là* $2\sqrt{12 \times \dfrac{2500}{L} \times 3L} = 600$ *khi* $12 \times \dfrac{2500}{L} = 3L$*, hay* $L = 100$*.* ***Kết luận:*** *mức sử dụng* K, L *với chi phí nhỏ nhất là* $L = 100, K = 2500/100 = 25$*.*

b. *Bài toán tương đương với bài toán sau:*

$$12K + 3L \to \min$$
$$\begin{cases} 25K^{0.5}L^{0.5} & = Q \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Ngoài phương pháp thể sử dụng ở câu trước, ta có thể áp dụng lý thuyết về điều kiện tối ưu của hàm chi phí như sau:

$$\frac{Q'_K}{Q'_L} = \frac{p_K}{p_L},$$

hay

$$L = 4K.$$

Thế vào điều kiện, ta được $K^* = \dfrac{Q}{50}, L^* = \dfrac{2Q}{25}$. *Thế vào hàm mục tiêu, ta được hàm chi phí là*

$$LTC(Q) = 12K^* + 3L^* = \frac{12Q}{50} + \frac{6Q}{25} = \frac{12Q}{25}.$$

2. Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng $Q = (K^2 + 2L^2)^{1/2}$, trong đó Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động. Cho biết giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 3$, và giá thuê một đơn vị lao động là $p_L = 12$.

   a. Tính mức sử dụng K, L để sản xuất ít nhất là $Q = Q_o = 270$ với chi phí nhỏ nhất.

   b. Xác định hàm tổng chi phí (theo sản lượng).

Lời giải.

a. *Bài toán tương đương với bài toán sau:*

$$p_K K + p_L L \to \min$$
$$\begin{cases} Q & \geq Q_o \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Theo lý thuyết, ta biết rằng bài toán trên cũng tương đương với bài toán:

$$p_K K + p_L L \to \min$$
$$\begin{cases} Q & = Q_o \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Hay

$$3K + 12L \to \min$$
$$\begin{cases} (K^2 + 2L^2)^{1/2} & = 270 \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Nghiệm tối ưu (K^*, L^*) phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$\frac{Q'_K}{Q'_L} = \frac{p_K}{p_L}, \text{ hay } \frac{K^*}{2L^*} = \frac{3}{12}, \text{ hay } L^* = 2K^*.$$

Thế vào đẳng thức $(K^2 + 2L^2)^{1/2} = 270$, ta được

$$K^* = 90, L^* = 180.$$

Kết luận: *Chi phí đạt giá trị nhỏ nhất khi mức sử dụng vốn và lao động lần lượt là 90 và 180, lúc đó chi phí tối thiểu là $3 \times 90 + 12 \times 180 = 2430$.*

b. *Bài toán tương đương với bài toán sau:*

$$3K + 12L \to \min$$
$$\begin{cases} (K^2 + 2L^2)^{1/2} & = Q \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Tương tự câu trước, ta có nghiệm tối ưu (K^*, L^*) phải thỏa mãn điều kiện sau

$$L^* = 2K^*.$$

Thế vào điều kiện, ta được $K^* = \dfrac{Q}{3}, L^* = \dfrac{2Q}{3}$. Thế vào hàm mục tiêu, ta được hàm chi phí là

$$LTC(Q) = 3K^* + 12L^* = 9Q.$$

3. Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng

$$Q = \left(\frac{1}{9}K^3 + \frac{1}{9}L^3\right)^{1/3},$$

trong đó Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động. Cho biết giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 3$, giá thuê một đơn vị lao động là $p_L = 6$.

a. Tính mức sử dụng K, L để sản xuất ít nhất là $Q = Q_o = 540$ với chi phí nhỏ nhất.

b. Xác định hàm tổng chi phí (theo sản lượng).

Lời giải.

a. *Bài toán tương đương với bài toán sau:*

$$p_K K + p_L L \to \min$$
$$\begin{cases} Q & \geq Q_o \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Theo lý thuyết, ta biết rằng bài toán trên cũng tương đương với bài toán:

$$p_K K + p_L L \to \min$$
$$\begin{cases} Q & = Q_o \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Hay

$$3K + 6L \to \min$$
$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{9}K^3 + \dfrac{1}{9}L^3\right)^{1/3} & = 540 \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Nghiệm tối ưu (K^*, L^*) phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$\frac{Q'_K}{Q'_L} = \frac{p_K}{p_L}, \text{ hay } \frac{K^*}{L^*} = \frac{3}{6}, \text{ hay } L^* = 2K^*.$$

Thế vào đẳng thức $\left(\dfrac{1}{9}K^3 + \dfrac{1}{9}L^3\right)^{1/3} = 540$, ta được

$$K^* = 540, L^* = 1080.$$

Kết luận: *Chi phí đạt giá trị nhỏ nhất khi mức sử dụng vốn và lao động lần lượt là* 540 *và 1080, lúc đó chi phí tối thiểu là* $3 \times 540 + 6 \times 1080 = 8100$.

b. *Bài toán tương đương với bài toán sau:*

$$3K + 6L \to \min$$
$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{9}K^3 + \dfrac{1}{9}L^3\right)^{1/3} & = Q \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Tương tự câu trước, ta có nghiệm tối ưu (K^*, L^*) phải thỏa mãn điều kiện sau

$$L^* = 2K^*.$$

Thế vào điều kiện, ta được $K^* = Q, L^* = 2Q$. Thế vào hàm mục tiêu, ta được hàm chi phí là

$$LTC(Q) = 3K^* + 6L^* = 9Q.$$

4. Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng $Q = 25K^{0.5}L^{0.5}$, trong đó Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động. Cho biết giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 12$, và giá thuê một đơn vị lao động $p_L = 3$.

   a. Xác định hàm chi phí.

   b. Phân tích tác động của giá thuê một đơn vị vốn tới hàm chi phí.

c. Phân tích tác động của việc tăng sản lượng lên hàm chi phí. Tại mức sản lượng nào doanh nghiệp nên duy trì để việc sản xuất có hiệu quả kinh tế?

Lời giải.

a. Theo bài tập trước, ta có hàm chi phí là

$$LTC(Q) = 12K^* + 3L^* = \frac{12Q}{50} + \frac{6Q}{25} = \frac{12Q}{25}.$$

b. Theo công thức trong tài liệu tham khảo, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\delta LTC}{\delta p_K} &= K^*, \\ \epsilon_{p_K}^{LTC} &= \frac{K^* \times p_K}{LTC}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{\delta LTC}{\delta p_K} &= K^* = \frac{Q}{50}, \\ \epsilon_{p_K}^{LTC} &= \frac{K^* \times p_K}{LTC} = \frac{\frac{Q}{50} \times 12}{\frac{12Q}{50}} = 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra,

- *khi giá thuê một đơn vị vốn tăng lên 1 thì chi phí sẽ tăng lên 0.02 trên mỗi đơn vị sản phẩm;*
- *khi giá thuê một đơn vị vốn tăng lên 1% thì chi phí cũng sẽ tăng lên 1% tại bất kì mức sản xuất nào.*

c. Do hàm chi phí $LTC = 12Q/50$ *nên ta có hàm giá trị cận biên của nó là* $LMC = 12/50$. *Nghĩa là khi tăng 1 đơn vị sản xuất trong điều kiện giá thuê vốn và lao động không đổi thì chi phí sẽ tăng lên* $12/50$, *hay 0.24. Ngoài ra ta dễ dàng tính được* $\epsilon_Q^{LTC} = 1$, *nên khi tăng mức sản xuất lên 1% thì chi phí cũng tăng lên 1%. Do* $\epsilon_Q^{LTC} = 1$ *không phụ thuộc vào Q, nên tại bất kì mức sản lượng nào thì việc sản xuất cũng không có tính kinh tế theo quy mô; tuy nhiên nó cũng không có tính phi kinh tế theo quy mô.*

5. Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng $Q = (K^2 + 2L^2)^{1/2}$, trong đó Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động.

a. Xác định hàm tổng chi phí (theo sản lượng Q, giá thuê một đơn vị vốn p_K và giá thuê một đơn vị lao động p_L).

b. Giả sử tại chu kỳ sản xuất thứ nhất $p_K = 3, p_L = 12$. Nếu tại chu kỳ sản xuất tiếp theo, giá thuê một đơn vị vốn tăng lên 1 đơn vị thì hàm chi phí bình quân thay đổi ra sao?

Lời giải.

a. Bài toán tương đương với bài toán sau:

$$p_K K + p_L L \to \min$$
$$\begin{cases} (K^2 + 2L^2)^{1/2} & = Q \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Nghiệm tối ưu (K^*, L^*) phải thỏa mãn điều kiện sau

$$\frac{Q'_K}{Q'_L} = \frac{p_K}{p_L},\ hay\ \frac{K^*}{2L^*} = \frac{p_K}{p_L},\ hay\ K^* = \frac{2p_K}{p_L}L^*.$$

Thế vào điều kiện $(K^2 + 2L^2)^{1/2} = Q$, ta được

$$L^* = \frac{Q}{\left(\frac{4p_K^2}{p_L^2} + 2\right)^{1/2}} = \frac{p_L Q}{(4p_K^2 + 2p_L^2)^{1/2}}.$$

Từ đó suy ra

$$K^* = \frac{2p_K Q}{(4p_K^2 + 2p_L^2)^{1/2}}.$$

Thế vào hàm mục tiêu, ta được hàm chi phí là

$$LTC(Q) = p_K K^* + p_L L^* = \frac{(2p_K^2 + p_L^2)Q}{(4p_K^2 + 2p_L^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}Q\sqrt{4p_K^2 + 2p_L^2}.$$

b. Hàm chi phí bình quân là

$$LAC = \frac{LTC}{Q} = \frac{1}{2}\sqrt{4p_K^2 + 2p_L^2}.$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\delta LAC}{\delta p_K} &= \frac{2p_K}{\sqrt{4p_K^2 + 2p_L^2}}, \\ \epsilon_{p_K}^{LAC} &= \frac{4p_K^2}{4p_K^2 + 2p_L^2}. \end{aligned}$$

Khi giá thuê một đơn vị vốn tăng lên 1 đơn vị thì hàm chi phí bình quân tăng lên

$$\frac{2 \times 3}{\sqrt{4 \times 3^2 + 2 \times 12^2}} = \frac{1}{3}.$$

Và khi giá thuê một đơn vị vốn tăng lên 1% thì hàm chi phí bình quân tăng lên

$$\frac{4 \times 3^2}{4 \times 3^2 + 2 \times 12^2} = \frac{1}{9}\%.$$

6. Hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng

$$Q = \left(\frac{1}{9}K^3 + \frac{1}{9}L^3\right)^{1/3},$$

trong đó Q là sản lượng, K là vốn, L là lao động. Cho biết giá thuê một đơn vị vốn là $p_K = 3$, và giá thuê một đơn vị lao động là $p_L = 6$.

a. Xác định hàm tổng chi phí (theo sản lượng).

b. Phân tích tác động của giá thuê một đơn vị lao động lên chi phí bình quân.

Lời giải.

a. *Bài toán tương đương với bài toán sau:*

$$3K + 6L \to \min$$
$$\begin{cases} (K+2L)^2 & = Q \\ K, L & \geq 0 \end{cases}$$

Tương tự câu trước, ta có nghiệm tối ưu (K^*, L^*) phải thỏa mãn điều kiện sau

$$L^* = 2K^*.$$

Thế vào điều kiện, ta được $K^* = Q, L^* = 2Q$. Thế vào hàm mục tiêu, ta được hàm chi phí là

$$LTC(Q) = 3K^* + 6L^* = 9Q.$$

b. *Ta có*

$$\epsilon_{p_L}^{LAC} = \epsilon_{p_L}^{LTC} = \frac{L^* p_L}{LTC} = \frac{2Q \times 6}{9Q} = \frac{4}{3}.$$

Do đó, khi giá thuê một đơn vị lao động tăng lên 1%, thì chi phí bình quân tăng lên sắp xỉ 1.33%.

7. Giả sử hàm sản xuất của doanh nghiệp có dạng $Q = \sqrt{KL}$, trong đó L là lượng lao động và K là lượng vốn. Cho giá vốn là $p_K = 25$ và giá lao động $p_L = 100$.

a. Xác định hàm tổng chi phí dài hạn LTC(Q).

b. Giả sử ở chu kỳ sản xuất tiếp theo, p_K lên 1%. Khi đó, hàm tổng chi phí thay đổi tương đối bao nhiêu %?

Lời giải.

a. *Tại mức sản lượng Q:*

$$25K + 100L \to \min,$$

với điều kiện là

$$\begin{cases} \sqrt{KL} \geq Q \\ K, L \geq 0. \end{cases}$$

Hàm Lagrange tương ứng là

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = 25K + 100L + \lambda(50\sqrt{KL} - Q)$$

Điểm dừng:

$$(K, L) = (2Q, Q/2).$$

Suy ra

$$LTC(Q) = 100Q.$$

b. Vì $\epsilon_K^{LTC} = \dfrac{Kp_K}{LTC} = \dfrac{2Q \times 25}{100Q} = 0.5$. *Nên hàm tổng chi phí tăng lên 0.5%.*

8. Giả sử một doanh nghiệp có hàm sản xuất dạng CES:

$$Q = \left(x^2 + 2y^2\right)^{1/2},$$

trong đó x là lượng vật liệu thứ nhất, và y là lượng vật liệu thứ hai. Cho biết giá của mỗi đơn vị vật liệu thứ nhất và thứ hai lần lượt là 1 và 2. Xác định hàm sản xuất dài hạn theo lượng chi phí tối đa K. Khi chi phí thay đổi thì hàm sản xuất thay đổi ra sao?

Lời giải. *Bài toán cụ thể*

$$\left(x^2 + 2y^2\right)^{1/2} \to \max.$$

với điều kiện:

$$x + 2y \leq K \text{ và } x, y \geq 0.$$

Điều kiện tối ưu

$$\frac{\frac{\delta Q}{\delta x}}{\frac{\delta Q}{\delta y}} = \frac{1}{2}.$$

Hay

$$\frac{x}{2y} = \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$x = y = \frac{K}{3}.$$

Suy ra

$$PM(K) = K.$$

Do $\epsilon_K^{PM} = 1$, *nên khi chi phí tăng lên 1% thì sản lượng cũng tăng lên 1%.*

9. Giả sử một doanh nghiệp có hàm sản xuất dạng CES:

$$Q = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2\right)^{1/2},$$

trong đó x là lượng vật liệu thứ nhất, và y là lượng vật liệu thứ hai.

a. Xác định hàm sản lượng theo mức kinh phí tối đa K, giá của vật liệu p_x, p_y.

b. Giả sử ở chu kỳ sản xuất thứ nhất, $p_x = 3, p_y = 12$. Nếu ở chu kỳ sản xuất tiếp theo giá của vật liệu thứ nhất tăng lên 1%, trong khi giá của vật liệu thứ hai không thay đổi thì hàm sản xuất thay đổi ra sao?

Lời giải.

a. *Bài toán tương đương với*

$$Q \ = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2\right)^{1/2} \quad \to \max$$

với điều kiện là

$$xp_x + yp_y = K \ \text{và}\ x, y \geq 0.$$

Điều kiện tối ưu là

$$\frac{Q'_x}{Q'_y} = \frac{p_x}{p_y}, \ \text{hay} \ \frac{x}{2y} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Do đó, nghiệm tối ưu (x^*, y^*) thỏa mãn $x^* = 2y^*\dfrac{p_x}{p_y}$. Thế vào điều kiện $xp_x + yp_y = K$, ta được

$$y^* = \frac{K}{\left(\dfrac{2p_x^2}{p_y} + p_y\right)} = \frac{Kp_y}{2p_x^2 + p_y^2}.$$

Từ đó suy ra

$$x^* = \frac{2Kp_x}{2p_x^2 + p_y^2}.$$

Do đó, hàm sản lượng là

$$PM(Q, p_x, p_y) = \left(\frac{1}{3}\frac{4K^2p_x^2}{(2p_x^2 + p_y^2)^2} + \frac{2}{3}\frac{K^2p_y^2}{(2p_x^2 + p_y^2)^2}\right)^{1/2} = K\sqrt{\frac{2}{3(2p_x^2 + p_y^2)}}.$$

b. *Ta dễ dàng tính được*

$$\epsilon_{p_x}^{PM} = -\frac{6p_x^2}{6p_x^2 + 3p_y^2},$$
$$\epsilon_{p_y}^{PM} = -\frac{3p_y^2}{6p_x^2 + 3p_y^2}.$$

Tại $p_x = 3, p_y = 12$, ta có

$$\epsilon_{p_x}^{PM}(3, 12) = -\frac{1}{9}.$$

Do đó, khi giá của vật liệu thứ nhất tăng lên 1%, trong khi giá của vật liệu thứ hai không đổi thì với cùng chi phí đã cấp trước đó, mức sản xuất sẽ giảm đi 1/9%, tức là vào khoảng 0.11%.

10. Phân tích so sánh tĩnh đối với hàm sản xuất có dạng Cobb-Douglas sau đây:

$$Q = Ax^{\alpha}y^{\beta},$$

với $A > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ là các hằng số.

Lời giải.

a. Phân tích hệ số cận biên:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta x} &= \alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta}, \\ \frac{\delta Q}{\delta y} &= \beta A x^{\alpha} y^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra khi x tăng hay giảm 1 đơn vị thì Q sẽ tăng hoặc giảm $\alpha A x^{\alpha-1} y^{\beta}$ đơn vị. Tương tự như vậy cho y và cho giá trị cận biên toàn phần.

b. Phân tích hệ số co giãn:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^Q &= \alpha, \\ \epsilon_y^Q &= \beta. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra khi x tăng hay giảm 1% thì Q sẽ tăng hoặc giảm α%. Tương tự như vậy cho y và cho hệ số co giãn toàn phần.

c. Phân tích hệ số thay thế:

$$\frac{Q'_x}{Q'_y} = \frac{\alpha y}{\beta x}$$

Do đó x có thể được thay thế bởi y. Và khi ta tăng x một đơn vị thì ta phải giảm y đi $\frac{\alpha y}{\beta x}$ đơn vị để không làm thay đổi sản lượng.

11. Phân tích so sánh tĩnh đối với hàm sản xuất có dạng CES sau đây:

$$Q = A(\alpha x^r + \beta y^r)^{1/r},$$

với $A > 0$, $0 < \alpha, \beta < 1$, và $r > 1$ là các hằng số.

Lời giải.

a. Phân tích hệ số cận biên:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{\delta x} &= \frac{A\alpha x^r(\alpha x^r + \beta y^r)^{1/r}}{x(\alpha x^r + \beta y^r)}, \\ \frac{\delta Q}{\delta y} &= \frac{A\beta y^r(\alpha x^r + \beta y^r)^{1/r}}{y(\alpha x^r + \beta y^r)}. \end{aligned}$$

b. Phân tích hệ số co giãn:

$$\begin{aligned}\epsilon_x^Q &= \frac{\alpha x^r}{\alpha x^r + \beta y^r},\\ \epsilon_y^Q &= \frac{\beta y^r}{\alpha x^r + \beta y^r}.\end{aligned}$$

c. Phân tích hệ số thay thế:

$$\frac{Q'_x}{Q'_y} = \frac{\alpha}{\beta}$$

12. Giả sử người tiêu dùng có hàm lợi ích $U = xy + 2x, x \geq 0, y \geq 0$, trong đó x, y lần lượt là lượng từng loại hàng hóa. Giá của từng loại hàng hóa lần lượt là $p_1 = 4\text{USD}, p_2 = 9\text{USD}$. Hãy tối ưu hóa chi phí và xác định lượng cầu Hick tương ứng biết rằng người tiêu dùng muốn thủ hưởng mức lợi ích cố định $U_0 = 900$.

    Giải:

    Bài toán đã cho trở thành bài toán cực tiểu có điều kiện như sau:

    Tìm (x, y) sao cho $C = 4x + 9y$ đạt cực tiểu với điều kiện $U(x, y) = xy + 2x = 900$.

    Giải bài toán cực trị này bằng phương pháp nhân tử Lagrange, ta tìm được duy nhất một điểm dừng $M(45, 18)$ ứng với nhân tử Lagrange duy nhất $\lambda = -0.2$.

    Kiểm tra điều kiện cực trị tại điểm $M(45, 18)$ và $\lambda = -2$ ta tìm được M chính là điểm cực tiểu với $C_{min} = 342$ (USD).

    Vậy, để chi phí tối thiểu, lượng cầu Hick tương ứng là $\hat{x} = 45, \hat{y} = 18$. Lúc đó chi phí C = 342 USD là nhỏ nhất.

13. Xét hai loại hàng hóa X, Y trên thị trường với giá của mỗi đơn vị hàng hóa X, Y lần lượt là 5 USD và 20 USD. Giả sử hàm lợi ích được cho bởi $U = (x+3)y,\ x \geq 0, y \geq 0$. Hãy chọn túi hàng (x, y) để tối ưu hóa lợi ích trong điều kiện ngân sách dành cho tiêu dùng là 185 USD và tìm lượng cầu Marshall tương ứng.

    Giải:

    Bài toán đã cho trở thành: Tìm (x, y) thỏa điều kiện $5x + 20y = 185$ để $U = (x+3)y$ đạt max.

    Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp thế như sau:

    $$5x + 20y = 185 \Leftrightarrow x + 4y = 37 \Rightarrow x = 37 - 4y$$

    $$U = (x+3)y = (40 - 4y)y = 40y - 4y^2, \forall y \geq 0$$

    Ta có:

    $$U' = -8y + 40, U'' = -8 < 0$$

    Suy ra, U đạt cực đại khi $y = 5, x = 17$.

Vậy, túi hàng $(x = 17, y = 5)$ làm tối ưu hóa lợi ích $U_{max} = 100$. Lượng cầu Marshall tương ứng chính là $\overline{x} = 17, \overline{y} = 5$.

14. Giả sử một doanh nghiệp cạnh tranh có hàm sản xuất $Q = K^{1/3}L^{1/3}, K > 0, L > 0$. Doanh nghiệp đó phải vay vốn K để sản xuất với lãi suất $w_K = 0.02$ và tiền thuê nhân công $w_L = 1$. Giả sử giá thị trường của sản phẩm là 3. Hỏi doanh nghiệp đó cần lượng vốn vay K và lượng nhân công cần thuê L là bao nhiêu để lợi nhuận đạt tối đa.

    Giải:

    Doanh nghiệp có chi phí sản xuất C và doanh thu R như sau:

    $$C = 0.02K + L, R = pQ = 3K^{1/3}L^{1/3}$$

    Do đó, hàm lợi nhuận của doanh nghiệp là:

    $$\pi = R - C = 3K^{1/3}L^{1/3} - 0.02K - L$$

    Ta sẽ tìm K, L để π đạt cực đại. Giải bài toán này ta tìm được lợi nhuận đạt cực đại $\pi_{max} = 50$ khi $K = 2500, L = 50$.

15. Giải bài toán tối ưu

    $$\begin{aligned} f(x,y) = x^2 + y^2 &\to \max \\ g(x,y) = 2x + y &\leq 2 \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

    Lời giải. Hàm Lagrange

    $$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(2x + y - 2)$$

    theo điều kiện Kuhn-Tucker

    $$\begin{aligned} &(a) L'_x(x, y, \lambda) = 2x - 2\lambda = 0 \\ &(b) L'_y(x, y, \lambda) = 2y - \lambda = 0 \\ &(c) \lambda[g(x, y) - b] = \lambda(2x + y - 2) = 0 \\ &(d) \lambda \geq 0 \\ &(e) g(x, y) = 2x + y \leq 2 \end{aligned}$$

    Ta có 2 trường hợp:

    Trường hợp 1. $\lambda = 0$

    $$\begin{aligned} &(a) x = 0 \\ &(b) y = 0 \\ &(c) 0 = 0 \\ &(d) 0 \geq 0 \\ &(e) 2x + y \leq 2 \end{aligned}$$

Vì vậy nghiệm trong trường hợp này là $(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$.

Trường hợp 2. $2x + y - 2 = 0$

$$\begin{aligned}
&(a)2x = 2\lambda\\
&(b)2y = \lambda\\
&(c)2x + y - 2 = 0\\
&(d)\lambda \geq 0\\
&(e)2x + y \geq 2
\end{aligned}$$

Nghiệm trong trường hợp này là $x = 0.8, y = 0.4, \lambda = 0.8 > 0$.

Vậy nghiệm tối ưu của bài toán là $x = 0.8, y = 0.4, \lambda = 0.8$.

16. Giải bài toán tối ưu

$$\begin{aligned}
f(x, y) = xy &\quad \to \max\\
g(x, y) = x^2 + y^2 &\quad \leq 2\\
x, y &\quad \geq 0.
\end{aligned}$$

Lời giải. Giải tương tự như trên, nghiệm tối ưu là $(x, y) = \pm(1, 1)$.

17. Giải bài toán tối ưu

$$\begin{aligned}
f(x, y) = -(x-4)^2 - (y-4)^2 &\quad \to \max\\
g_1(x, y) = x + y &\quad \leq 4\\
g_2(x, y) = x + 3y &\quad \leq 9\\
x, y &\quad \geq 0.
\end{aligned}$$

Lời giải. Hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = -(x-4)^2 - (y-4)^2 - \lambda_1(x + y - 4) - \lambda_1(x + 3y - 9)$$

theo điều kiện Kuhn-Tucker, ta có

$$\begin{aligned}
&-2(x-4) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0\\
&-2(y-4) - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0\\
&\lambda_1(x + y - 4) = 0\\
&\lambda_2(x + 3y - 9) = 0\\
&\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0\\
&x + y \leq 4, x + 3y \leq 9
\end{aligned}$$

Từ $\lambda_1(x + y - 4) = 0$ và $\lambda_2(x + 3y - 9)$, ta có 4 trường hợp sau

Trường hợp 1. $x + y - 4 = 0, x + 3y - 9 = 0$. Ta tìm được nghiệm $x = 3/2, y = 5/2, \lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1 \leq 0$ (loại).

Trường hợp 2. $x + y - 4 = 0, \lambda_2 = 0$. Nghiệm tìm được là $x = 2, y = 2, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$.

Trường hợp 3. $\lambda_1 = 0, x + 3y - 9 = 0$. Nghiệm tìm được là $x = 3.3, y = 1.8$ không thỏa $x + y \leq 4$ (loại).

Trường hợp 4. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Nghiệm tìm được là $x = y = 4$ không thỏa $x + y \leq 4$ (loại).

Vậy nghiệm tối ưu là $x = 2, y = 2$.

18. Giải bài toán tối ưu

$$\begin{aligned} f(x,y) = -(x-2)^2 - 2(y-1)^2 &\quad \to \max \\ g_1(x,y) = -x + y &\quad \leq 0 \\ g_2(x,y) = x + 4y &\quad \leq 3 \\ x, y &\quad \geq 0. \end{aligned}$$

Lời giải. Giải tương tự như trên, nghiệm tối ưu là $(x, y) = (5/3, 1/3)$.